Université Pierre et Marie Curie
DEUG MIAS première année
Informatique-1

Année 2003-2004
Devoir sur table
19 novembre 2003
1 heure 30

Remarques :

– Aucun document ni machine électronique n'est permis à l'exception de la carte de référence de Scheme.
– Les questions peuvent être résolues de façon indépendante. Il est possible, voire même utile, pour répondre à une question, d'utiliser les fonctions qui sont l'objet des questions précédentes.
– La clarté des réponses et la présentation des programmes seront appréciées.
– La note tiendra compte de l'efficacité de vos programmes.
– Le barème (total sur 46, la note étant considérée comme une note sur 40) n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice I (question de cours)

Question 1 (1 point) :
Écrire une spécification et une définition de la fonction `carre` qui étant donné un nombre *x* rend le carré de *x*.

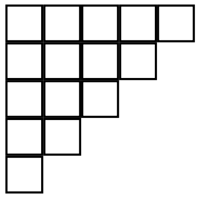
```
;;; carre: Nombre -> Nombre
;;; (carre x) rend le carré du nombre x
(define (carre x)
  (* x x) )
```

Question 2 (2 points) :
Écrire la signature et une définition de la fonction `somme-carres` qui, étant donnée une liste *L* de nombres, rend la somme des carrés des éléments de *L*.

```
;;; somme-carres: LISTE[Nombre] -> Nombre
;;; (somme-carres L) rend la somme des carres des
;;; éléments de L ; rend 0 pour la liste vide
(define (somme-carres L)
  (if (pair? L)
      (+ (carre (car L)) (somme-carres (cdr L)))
      0 ) )
```

Exercice II (récursion sur les entiers)

Un « triangle de Pascal d'ordre n » est une surface en escalier constituée d'un premier rectangle de longueur n, d'un second rectangle de longueur $n-1$... et d'un dernier rectangle de longueur un, tous ces rectangles étant de largeur un. Par exemple, le dessin ci-contre est le « triangle de Pascal d'ordre 5 » et son aire est 15.



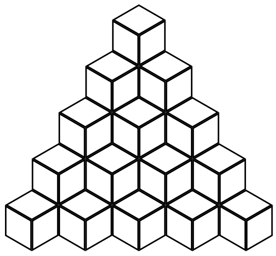
Noter qu'un « triangle de Pascal d'ordre n » est constitué par un rectangle de longueur n et de largeur un – son aire est donc n – (la première ligne dans le dessin ci-contre) et par un « triangle de Pascal d'ordre $n-1$ » (les autres lignes dans le dessin ci-contre).

Question 1 (4 points) :

Écrire la signature et une définition récursive de la fonction `aire-Pascal` qui, étant donné un entier strictement positif n rend l'aire de la surface du « triangle de Pascal d'ordre n ».

```
;;; aire-Pascal : nat/>0/ -> nat
;;; (aire-Pascal n) rend l'aire du « triangle de Pascal d'ordre n ».
(define (aire-Pascal n)
  (if (= 1 n)
      1
      (+ n (aire-Pascal (- n 1)))))
```

Une « pyramide de Pascal d'ordre n » est un volume en escalier, chaque marche de l'escalier étant de hauteur un – son volume est donc égal à sa surface –, dont le premier niveau est un « triangle de Pascal d'ordre n », le deuxième niveau est un « triangle de Pascal d'ordre $n-1$ »,... le dernier niveau étant un cube dont les côtés ont une longueur égale à un. Par exemple, le dessin ci-contre représente une « pyramide de Pascal d'ordre 5 » dont le volume est 35.



Question 2 (4 points) :

Écrire la signature et une définition de la fonction `volume-Pascal` qui, étant donné un entier strictement positif n rend le volume de la « pyramide de Pascal d'ordre n ».

```
;;; volume-pascal : nat/>0/ -> nat
;;; (volume-Pascal n) rend
(define (volume-Pascal n)
  (if (= 1 n)
      1
      (+ (aire-Pascal n) (volume-Pascal (- n 1)))))
```

Exercice III (récursion sur les entiers)

Question 1 (4 points) :

Écrire la signature et une définition de la fonction `premiers-entiers-decroissante` qui, étant donné un entier naturel *n* rend la liste des entiers compris entre 1 et *n*, les éléments de la liste étant rangés en ordre décroissant. Par exemple :

```
(premiers-entiers-decroissante 7)  → (7 6 5 4 3 2 1)
(premiers-entiers-decroissante 0)  → ()
```

```
;;; premiers-entiers-decroissante : nat -> LISTE[nat]
(define (premiers-entiers-decroissante n)
  (if (= n 0)
      '()
      (cons n (premiers-entiers-decroissante (- n 1)))))
```

Nous voudrions maintenant écrire, sans utiliser la fonction `premiers-entiers-decroissante` et la fonction `reverse`, une définition de la fonction `premiers-entiers-croissante` qui, étant donné un entier naturel *n*, rend la liste des entiers compris entre 1 et *n*, les éléments de la liste étant rangés en ordre croissant. Par exemple :

```
(premiers-entiers-croissante 7)  → (1 2 3 4 5 6 7)
```

Pour cela, nous définirons la fonction `suite-entiers` dont la spécification est :

;;; *suite-entiers : nat * nat -> LISTE[nat]*
;;; *HYPOTHESE : p <= n*
;;; *(suite-entiers p n) rend la liste des entiers de p à n.*

Par exemple :

```
(suite-entiers 7 7)  → (7)
(suite-entiers 3 7)  → (3 4 5 6 7)
```

Question 2 (2 points) :

En utilisant la fonction `suite-entiers`, donner une définition de `premiers-entiers-croissante`.

```
(define (premiers-entiers-croissante n)
  (suite-entiers 1 n))
```

Question 3 (3 points) :

Donner une définition de la fonction `suite-entiers`.

```
(define (suite-entiers p n)
  (if (= p n)
      (list n)
      (cons p (suite-entiers (+ p 1) n))))
```

Exercice IV (question de cours)

Question 1 (4 points) :

Écrire la signature et une définition, **la plus efficace possible**, de la fonction `somme-cumulee` qui, étant donnée une liste *L* de nombres rend la liste dont le premier élément est égal à la somme des éléments de *L*, dont le deuxième élément est égal à la somme des éléments de $(cdr\ L)$... dont le dernier élément est égal au dernier élément de *L*. Par exemple, `(somme-cumulee (list 1 2 3 4))` $\rightarrow$ `(10 9 7 4)`

```
;;; somme-cumulee : LISTE[Nombre] -> LISTE[Nombre]
;;; (somme-cumulee L) rend la liste dont le premier élément est égal à la
;;; somme des éléments de L, dont le deuxième élément est égal à la somme
;;; des éléments de (cdr L)... dont le dernier élément est égal au dernier
;;; élément de L.
(define (somme-cumulee L)
  ;; sc-non-vide : LISTE[Nombre]/non vide/ -> LISTE[Nombre]
  ;; (sc-non-vide L) == (somme-cumulee3 L)
  (define (sc-non-vide L)
    (if (pair? (cdr L))
        (let ((reste-fait (sc-non-vide (cdr L))))
          (cons (+ (car L) (car reste-fait))
                reste-fait))
        L))
  (if (pair? L)
      (sc-non-vide L)
      L))
```

Remarque : sur 1 si en $O(2^n)$, sur 3 si 2 tests à chaque appel récursif.

Exercice V (exercice simple sur les listes de listes)

Question 1 (1 point) :
Écrire une expression qui a pour valeur la liste `((5 2))`, liste qui a comme unique élément la liste qui a deux éléments, les entiers 5 et 2.

```
(list (list 5 2))
```
ou
```
'((5 2))
```

Question 2 (2 points) :
Écrire la signature et une définition de la fonction `prem-prem` qui, étant donnée *LL*, une liste non vide de listes non vides d'éléments rend le premier élément de la première liste de *LL*. Par exemple,

```
(prem-prem (list (list 5 2) (list 3)))  → 5
```

```
;;; prem-prem : LISTE[LISTE[alpha]] -> alpha
;;; ERREUR lorsque LL est la liste vide ou lorsque (car LL) est la liste vide
;;; (prem-prem LL) rend le premier élément de la première
;;; liste de LL
(define (prem-prem LL)
  (caar LL))
```

Exercice VI (récursion sur les listes)

Listes décroissantes en triangle

Question 1 (3 points) :
Écrire la signature et une définition de la fonction `liste-triangle-dec` qui, étant donnée une liste *L*, rend la liste (de listes) dont le premier élément est la liste *L* donnée, dont le second élément est la liste *L* donnée privée de son premier élément, dont le troisième élément est la liste *L* donnée privée de ses deux premiers éléments... et dont le dernier élément est la liste, de longueur un, qui comporte le dernier élément de la liste donnée *L*. Par exemple :

```
(liste-triangle-dec (list 1 2 3 4))  → ((1 2 3 4) (2 3 4) (3 4) (4))
```

```
;;; liste-triangle-dec : LISTE[alpha] -> LISTE[LISTE[alpha]]
(define (liste-triangle-dec L)
  (if (pair? L)
      (cons L (liste-triangle-dec (cdr L)))
      '()))
```

Listes croissantes en triangle

On voudrait maintenant travailler sur la fonction qui, étant donnée une liste *L*, rend la *liste croissante en triangle de L* c'est-à-dire la liste (de listes) dont le premier élément est la liste qui comporte le dernier élément de la liste donnée *L*, dont le deuxième élément est la liste qui comporte les deux derniers éléments de la liste donnée *L*... et dont le dernier élément est la liste donnée *L*. Par exemple, si *L* est la liste (1 2 3 4), la *liste croissante en triangle de L* est égal à la liste (de listes) ((4) (3 4)(2 3 4)(1 2 3 4))

La fin du problème consiste à écrire, sans utiliser la fonction `reverse`, plusieurs définitions de la fonction `liste-triangle-croi` dont la spécification est :

```
;;; liste-triangle-croi : LISTE[alpha] -> LISTE[LISTE[alpha]]
;;; (liste-triangle-croi L) rend la liste croissante en triangle de L
```

Première implantation

Question 2 (2 points) :
Écrire la signature et une définition de la fonction `ajout-en-fin` qui, étant donnés un élément *e* et une liste *L*, rend la liste obtenue en ajoutant *e* à la fin de la liste *L*.

```
;;; ajout-en-fin : alpha * LISTE[alpha] -> LISTE[alpha]
;;; (ajout-en-fin x L ) rend la liste obtenue en ajoutant x
;;; à la fin de la liste L
(define (ajout-en-fin e L)
  (if (pair? L)
      (cons (car L) (ajout-en-fin e (cdr L)))
      (list e)))
```

ou

```
(define (ajout-en-fin e L)
  (append L (list e)))
```

Question 3 (3 points) :
En utilisant la fonction `ajout-en-fin`, donner une première définition de la fonction `liste-triangle-croi`.

```
(define (liste-triangle-croi1 L)
  (if (pair? L)
      (ajout-en-fin L (liste-triangle-croi1 (cdr L)))
      '()))
```

Deuxième implantation

Étant donnés un entier positif *n* et une liste *L*, la fonction `liste-trapeze1` rend la liste constituée par les *n* derniers éléments de la *liste croissante en triangle de L*. Par exemple,

```
(liste-trapeze1 2 '(1 2 3 4))  →  ((2 3 4) (1 2 3 4))
```

Question 4 (3 points) :

Compléter la définition suivante de `liste-trapeze1` :

```
;;; liste-trapeze1 : nat * LISTE[alpha] -> LISTE[LISTE[alpha]]
;;; HYPOTHESE: n est inférieur ou égal à la longueur de L.
;;; (liste-trapeze1 n L) rend la liste constituée par les n derniers éléments
;;; de la liste croissante en triangle de L.
(define (liste-trapeze1 n L)
  (if (= n 1)
      (list L)
      (let ((LL1 (liste-trapeze1 (- n 1) L)))
        (cons (cdar LL1) LL1))))
```

Question 5 (2 points) :
En utilisant la fonction `liste-trapeze1`, donner une deuxième définition de `liste-triangle-croi`.

```
(define (liste-triangle-croi3 L)
  (liste-trapeze1 (length L) L))
```

Troisième implantation

Question 6 (4 points) :
Écrire une définition de la fonction `liste-trapeze2` dont la spécification est :

```
;;; liste-trapeze2 : LISTE[beta] * LISTE[alpha] -> LISTE[LISTE[alpha]]
;;; n étant la longueur de la liste L1, (liste-trapeze2  L1 L) rend
;;; les n+1 derniers éléments de (liste-triangle-croi L)
```

Il est interdit d'utiliser la fonction `liste-trapeze1`.

```
(define (liste-trapeze2  L1 L)
  (if (pair? L1)
      (let ((LL1 (liste-trapeze2 (cdr L1) L)))
        (cons (cdar LL1) LL1))
      (list L)))
```

Question 7 (2 points) :

En utilisant la fonction `liste-trapeze2`, donner une troisième définition de `liste-triangle-croi`.

```
(define (liste-triangle-croi L)
  (if (pair?  L)
      (liste-trapeze2 (cdr L) L)
      '()))
```